Basisprüfung Lineare Algebra

Datum	Samstag, 24. August 2019	Note

1	2	3	4	5	6	Total	Bonus	
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	36 P	Übungen	Anz. Blätter

Auf die Aufgaben dürfen Sie erst auf Anweisung des Assistenten umblättern! Sie können die Hinweise jedoch jetzt durchlesen.

Allgemeine Hinweise:

- Kleben Sie das Etikett mit Ihrem Namen oben auf dem grossen leeren Feld auf.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert! Davon ausgenommen ist nur Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe).

- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe) auf dem Extrablatt (letzte Seite dieser Prüfung) ein.

- Beginnen Sie jede der sechs Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Vor dem Start der Prüfung:

- Ein Etikett mit Ihrem Namen sollte auf dem Couvert sein und das zweite Etikett auf der vordersten Seite der Prüfungsaufgaben.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Legen Sie genug leere Blätter auf dem Tisch bereit, sodass Sie nicht mehr zur Tasche greifen müssen.

Am Ende der Prüfung:

- Geben Sie die Prüfungsaufgaben und auch Ihre Antworten gemeinsam in das Couvert.
- Kleben Sie das leere Etikett auf die Lasche des Couverts, sodass das Couvert versiegelt ist, und unterschreiben Sie auf das Etikett. (Benutzen Sie *nicht* die Kleblasche des Couverts.)
- Warten Sie bis alle Prüfungen gezählt sind.

Bei Fragen und Unklarheiten fragen Sie die anwesenden Assistenten.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 36. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 34 und für die Note 4.00 mindestens 17 Punkte.

Extrablatt: Aufgabe 6

Name: ____________________________

Tragen Sie auf dieses Extrablatt die Lösungen zu den "Richtig oder Falsch"-Fragen aus Aufgabe 6 ein, indem Sie das Kästchen **ankreuzen**, welches der korrekten Antwort entspricht. Tragen Sie oben Ihren Namen ein.

Bewertungsschema: Jede *korrekte* Antwort gibt einen Punkt, jedes *nicht korrekt gesetzte* Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Für jede Teilaufgabe, für die *kein Kreuz* gemacht wurde, gibt es 0 Punkte. Die Summe der Punktzahlen für die ganze Aufgabe 6 wird, falls negativ, auf 0 aufgerundet.

Teilaufgabe	Richtig	Falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐
c)	☐	☐
d)	☐	☐
e)	☐	☐
f)	☐	☐

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix A und der Vektor b wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen die Singulärwertzerlegung von A finden, also $A = U\Sigma V^{\top}$.

a) Bestimmen Sie Σ.

b) Bestimmen Sie V und U.

c) Berechnen Sie $\min_{v\in\mathbb{R}^1} \|Av - b\|_2$ und geben Sie ein x an, sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^1} \|Av - b\|_2$.

Bitte wenden!

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$ und $\mathcal{U}_3 = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_3$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_3 \\ & x(t) & \longmapsto & x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_3$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_3$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_3$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 - t, \qquad p_3(t) = 1 + t + t^2\,,$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 1 + t^2, \qquad q_3(t) = 1 - t^2\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ aus Teilaufgabe **c**) beschrieben wird?

5. [6 Punkte] Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgende Aussage:

Es gilt $AB = AC$, genau dann wenn gilt $A^H AB = A^H AC$.

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) Der folgende Code beschreibt einen Algorithmus in Matlab mit Input `A`:

```
>>[m, n] = size(A);
>>B = zeros([m, n]);
>>C = zeros([n, n]);
>>for j = 1 : m
>>    vj = A(:, j);
>>    for i = 1 : j
>>        C(i, j) = B(:, i).' * A(:, j);
>>        vj      = vj - C(i, j) * B(:, i);
>>    end
>>    C(j, j) = norm(vj);
>>    B(:, j) = vj / C(j, j);
>>end
```

Dieser Algorithmus beschreibt ein Verfahren zur Diagonalisierung der Matrix `A`.

b) Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix, dessen Kern die Dimension 0 hat.

Somit ist $\det(A) \neq 0$.

c) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Falls $m < n$, dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen, und sei A zusätzlich invertierbar.

Dann ist $A^{-1}B$ symmetrisch.

e) Sei A eine reelle, invertierbare $n \times n$ Matrix, und sei $I + A$ invertierbar.

Dann ist $(I + A)^{-1} = I - A^{-1}$.

f) Die reelle $n \times n$ Matrix A hat n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Somit gilt $\det(A^{-1}) = 1/(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)$.